数理解析研究所講究録
941巻 1996年 136-142

17.

多変数 Puiseux 級数の演算及びその応用

片町 健太郎 (筑波大学)
katamati@math.tsukuba.ac.jp

17.1 記法

$\mathbb{K}$ $\cdots$ 標数 0 の体。

$\overline{\mathbb{K}}$ $\cdots$ $\mathbb{K}$ の代数的閉体。

$\mathbb{K}\langle\cdot\rangle$ $\cdots$ 体 $\mathbb{K}$ 上の Puiseux 級数体。

即ち $\displaystyle\sum_{k=-k_0}^{\infty} a_k(\cdot^{\frac{1}{m}})^k,\quad a_k\in\mathbb{K},\quad 0<m\in\mathbb{Z},\quad m,k_0$ は有界

なる級数、つまり Puiseux 級数の全体がなす体。

$\mathbb{K}[\cdot]$ $\cdots$ 体 $\mathbb{K}$ 上の 多項式環。

$\mathbb{K}\{\cdot\}$ $\cdots$ 体 $\mathbb{K}$ 上の 冪級数環。

$\mathbb{K}\langle x,y\rangle$ $\cdots$ Puiseux 級数体 $\mathbb{K}\langle x\rangle$ 上の Puiseux 級数体 $\mathbb{K}\langle x\rangle\langle y\rangle$

17.2 四則演算について

17.2.1 冪級数の場合

冪級数 ($\in\mathbb{K}\{\cdot\}$) どうしの四則演算はよく知られているので省略する。なお、この計算には $\mathbb{K}$ 上の四則演算だけを使っている事に留意。

17.2.2 単変数 Puiseux 級数の場合

単変数 Puiseux 級数どうしの四則演算については簡単な変形 (例えば $x \to x^n$ など) によって打ち切り冪級数どうしの四則演算に帰着させることにより計算出来る。

17.2.3 多変数 Puiseux 級数の場合

$n-1$ 変数 Puiseux 級数まで四則演算が出来るものとする。n 変数 Puiseux 級数 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を

$$\mathbb{K}\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \ni f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_n) = \sum_{i=-k}^{\infty} f_i(x_1, \ldots, x_{n-1}){x_n}^{i/m} \in \mathbb{K}\langle x_1, \ldots, x_{n-1}\rangle\langle x_n\rangle$$

と $\mathbb{K}\langle x_1, \ldots, x_{n-1}\rangle$ 上の単変数 Puiseux 級数とみなす。帰納法の仮定より $n-1$ 変数 Puiseux 級数の四則演算は出来るので、n 変数の場合も同様に四則演算が可能である。よって帰納法により、任意の多変数 Puiseux 級数の四則演算が可能であることがわかる。

17.3 冪乗について

17.3.1 冪級数の場合

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i x^i$$

が与えられたとする。このとき $g(x) = f(x)^\alpha$ (α は定数) を満たす $g(x)$ を求めることを考える。この関数 $g(x) = f(x)^\alpha$ は次の微分方程式

$$f(x)\frac{dg(x)}{dx} = \alpha g(x)\frac{df(x)}{dx}$$

を満たす。ここで

$$g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} g_j x^j$$

とおいて両辺に代入して、各次数の係数部を比べることにより次の関係式が得られる。

$$\begin{cases} g_0 = {f_0}^\alpha \\ g_n = \dfrac{1}{nf_0}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\{(\alpha+1)k-n\}f_k g_{n-k} \quad (n \geq 1) \end{cases} \tag{1}$$

これにより逐次的に g_n が得られるので $f(x)^\alpha$ が計算出来る。

17.3.2 単変数 Puiseux 級数の場合

$$f(x) = \sum_{i=-k}^{\infty} f_i x^{i/m} \in \mathbb{K}\langle x\rangle$$

が与えられたとする。

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{i=-k}^{\infty} f_i x^{i/m} \\
&= x^{-k/m}\left(\sum_{i=-k}^{\infty} f_i (x^{1/m})^{i+k}\right) \\
&\quad \text{ここで } f'_n = f_{n-k}, y = x^{1/m} \text{ とおくと} \\
&= y^{-k}\left(\sum_{i=0}^{\infty} f'_i y^i\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(x)^\alpha &= y^{-\alpha k}\left(\sum_{i=0}^{\infty} f'_i y^i\right)^\alpha \\
&= y^{-\alpha k}\left(\sum_{i=0}^{\infty} g_i y^i\right) \\
&\quad \text{冪級数の冪乗を求めた} \\
&= x^{-\alpha k/m}\left(\sum_{i=0}^{\infty} g_i x^{i/m}\right)
\end{aligned}$$

このように冪級数の冪乗の計算に帰着させることにより容易に計算出来る。

17.3.3 n 変数 Puiseux 級数の場合

$n-1$ 変数 Puiseux 級数まで冪乗が計算出来るものと仮定する。

$$f(x_n) = \sum_{i=-k}^{\infty} f_i(x_1, \ldots, x_{n-1}) {x_n}^{i/m} \in \mathbb{K}\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$$

仮定より $f_0 \in \mathbb{K}\langle x_1, \ldots, x_{n-1}\rangle$ の冪乗は計算出来るので、(1) と単変数 Puiseux 級数の場合と同様の変形により、n 変数 Puiseux 級数の冪乗が計算可能である。よって任意の多変数 Puiseux 級数の冪乗が計算可能である事が示せた。

17.4 指数関数について

17.4.1 冪級数の場合

$g(x) = e^{f(x)}$ は次の微分方程式を満たす。

$$\frac{dg(x)}{dx} = g(x)\frac{df(x)}{dx}$$

この式より次の関係式が得られる。

$$\begin{cases} g_0 = e^{f_0} \\ g_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k f_k g_{n-k} \quad (n \geq 1) \end{cases} \tag{2}$$

これにより逐次的に g_n が得られるので $e^{f(x)}$ が計算出来る。

17.4.2 単変数 Puiseux 級数の場合

一般の Puiseux 級数の指数関数は一般的に Puiseux 級数になるとは限らない (負冪の部分が有限にならなくなってしまう) ので負冪を含まない Puiseux 級数の場合についてのみ考えることにする。

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i {x^{i/m}} \in \mathbb{K}\langle x \rangle$$

が与えられたとする。

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} f_i {x^{i/m}} \\ &\quad \text{ここで } y = x^{1/m} \text{ とおくと} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} f_i y^i \\ e^{f(x)} &= e^{\left(\sum_{i=0}^{\infty} f_i y^i\right)} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} g_i y^i \\ &\quad \text{冪級数の指数関数を求めた} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} g_i {x^{i/m}} \end{aligned}$$

このように冪級数の指数関数の計算に帰着させることにより容易に計算出来る。

17.4.3 n 変数 Puiseux 級数の場合

$n-1$ 変数 Puiseux 級数まで指数関数が計算出来るものと仮定する。

$$f(x_n) = \sum_{i=-k}^{\infty} f_i(x_1, \ldots, x_{n-1}) {x_n}^{i/m} \in \mathbb{K}\langle x_1, \ldots, x_{n-1}\rangle\langle x_n\rangle$$

仮定より $f_0 \in \mathbb{K}\langle x_1, \ldots, x_{n-1}\rangle$ の指数関数は計算出来るので、(2) と単変数 Puiseux 級数の場合と

同様の変形により、n 変数 Puiseux 級数の冪乗が計算可能である。よって任意の多変数 Puiseux 級数の冪乗が計算可能である事が示せた。

17.5 代数方程式の求根

17.5.1 単変数の場合

単変数代数方程式の根は 5 次以上ならば一般解が存在しないが、そのような場合でも数値的には DKA 算法 ([1] 参照) などを用いて容易に求める事が出来る。

17.5.2 二変数の場合

よく知られている 古典的 Newton-Puiseux 法 ([2] 参照) によって求める事が出来る。また、より効率的な算法として、佐々木・加古によって提案された拡張 Hensel 構成 ([3] 参照) がある。この算法は係数を浮動小数として扱っても問題がを生じないので正確な代数的数を必要としない場合などは係数を浮動小数として扱う事により、より高速に計算が出来る。

17.5.3 多変数の場合

n 変数の多項式の根を $n-1$ 変数 Puiseux 級数で表す事が出来るとする。$n+1$ 変数多項式 $f(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1})=0$ の根を求めるには、まず $f(x_1,\ldots,x_n,0)=0$ の x_1 に関する根を$\overline{\mathbb{K}}\langle x_2,\ldots,x_n\rangle$ の形で求める (帰納法の仮定より計算可能)。次に元の多項式を $\mathbb{K}\langle x_2,\ldots,x_n\rangle$ 上の 2 変数多項式 $g(x_1,x_{n+1})$ として考え、先ほど求めた $g(x_1,0)(=f(x_1,\ldots,x_n,0))=0$ の根を元にして x_{n+1} についての根を古典的 Newton-Puiseux 法を用いる事により、$\overline{\mathbb{K}}\langle x_2,\ldots,x_n\rangle\langle x_{n+1}\rangle$ の形で表す事が出来る。これによって任意の多変数の場合も根が Puiseux 級数で表す事が出来る。

17.5.4 3変数多項式の例

$$F(x,y,z)=x^3+y^2x^2-(y+y^4+z^2)x+2y^3+y^2+z$$

まず、$F(x,y,0)=0$ の根を求める。

$$\begin{cases} f_{10}(y)=y+3y^2+10y^3+62y^4+\cdots \\ f_{20}(y)=y^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}y-\frac{3}{8}y^{\frac{3}{2}}-2y^2-\cdots \\ f_{30}(y)=-y^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}y+\frac{3}{8}y^{\frac{3}{2}}-2y^2+\cdots \end{cases}$$

次に元の多項式を $\mathbb{K}\langle y\rangle$ 上の 2 変数多項式

$$G(x,z) = x^3 + y^2x^2 - (z^2 + y + y^4)x + z + 2y^3 + y^2$$

として考え、これの根を求める。この場合は既に $G(x,0) = 0\ (= F(x,y,0))$ の根がそれぞれ単根となっているので、簡単な反復により根が求まる。

具体的には $\overline{\mathbb{K}}\langle y\rangle$ 上の未知数 $f_{i1}(y)$ を $G(f_{i0}(y) + f_{i1}(y)z, z)$ と代入した時の z の最低次項が 0 になるように定め、

$$\begin{cases} f_{11}(y) = y^{-1} + 3 + 29y + 239y^2 + 2145y^3 \cdots \\ f_{21}(y) = -\frac{1}{2}y^{-1} - \frac{3}{4}y^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{2} - \frac{161}{32}y^{\frac{1}{2}} - \frac{29}{2}y - \cdots \\ f_{31}(y) = -\frac{1}{2}y^{-1} + \frac{3}{4}y^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{2} + \frac{161}{32}y^{\frac{1}{2}} - \frac{29}{2}y + \cdots \end{cases}$$

を得る。同様にして $\overline{\mathbb{K}}\langle y\rangle$ 上の未知数 $f_{i2}(y)$ を $G(f_{i0}(y) + f_{i1}(y)z + f_{i2}z^2, z)$ と代入した時の z の最低次項が 0 になるように定め、

$$\begin{cases} f_{12}(y) = 3y^{-2} + 37y^{-1} + 461 + 5388y + 59835y^2 + \cdots \\ f_{22}(y) = -\frac{3}{8}y^{-\frac{5}{2}} - \frac{3}{2}y^{-2} - \frac{315}{64}y^{-\frac{3}{2}} - \frac{37}{2}y^{-1} - \frac{68053}{1024}y^{-\frac{1}{2}} - \frac{461}{2} - \cdots \\ f_{32}(y) = \frac{3}{8}y^{-\frac{5}{2}} - \frac{3}{2}y^{-2} + \frac{315}{64}y^{-\frac{3}{2}} - \frac{37}{2}y^{-1} + \frac{68053}{1024}y^{-\frac{1}{2}} - \frac{461}{2} - \cdots \end{cases}$$

を得る。

よって $G(x,z) = 0$ の根は

$$\begin{cases} G_1(z) = f_{10}(y) + f_{11}(y)z + f_{12}(y)z^2 + \cdots \\ G_2(z) = f_{20}(y) + f_{21}(y)z + f_{22}(y)z^2 + \cdots \\ G_3(z) = f_{30}(y) + f_{31}(y)z + f_{32}(y)z^2 + \cdots \end{cases}$$

と表現出来る。

17.6 応用

複素数体上で四則演算のみを使った算法はそのまま Puiseux 級数体上の四則演算を使った算法に適用出来るので応用範囲はかなり広い。

17.6.1 行列

行列に対する算法では基本的なガウスの消去法、LU 分解などは、そのまま Puiseux 級数体上で、即ち行列の要素が多変数 Puiseux 級数であっても適用可能である。LU 分解の結果を用いて行列式などを求める事もでき、その結果を元にして固有値を求める事も出来る。

参考文献

[1]名取亮, "数値解析とその応用", コロナ社, pp.81–83.

[2]R.J.Walker. "Algebraic Curves," Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1978.

[3]T.Sasaki and F.Kako "Solving Multivariate Algebraic Equation by Hensel Construction," preprint (Univ. c Tsukuba and Nara Women Univ.), 22 pages, Jan. 1993.